Chapitre 7

Applications

Plan du chapitre

1 Généralités . . . **2**

1.1 Applications . . . 2

1.2 Fonctions . . . 3

1.3 Applications usuelles . . . 3

2 Image directe et image réciproque . . . **4**

2.1 Image directe . . . 4

2.2 Image réciproque . . . 5

2.3 Propriétés théoriques des images directe et réciproque . . . 6

3 Opérations sur les applications . . . **8**

3.1 Restriction, prolongement . . . 8

3.2 Composition d'applications . . . 9

4 Injection, surjection, bijection. . . . **10**

4.1 Injection. . . . 10

4.2 Surjection . . . 11

4.3 Bijection. . . . 13

4.4 Application réciproque . . . 13

4.5 Propriétés de l'application réciproque. . . . 16

5 Transformations du plan complexe . . . **17**

5.1 Translations . . . 17

5.2 Homothétie . . . 18

5.3 Rotations . . . 18

5.4 Similitudes directes . . . 19

6 Méthodes pour les exercices. . . . **22**

Hypothèse

E, F, G, H, E', F' sont des ensembles quelconques.

1 Généralités

1.1 Applications

Définition 7.1 – Définition “intuitive” d’application

On dit que f est une application de E dans F, si à chaque élément x de E, f associe un *unique* élément de F. Cet élément est noté $f(x)$.

- E est appelé l’ensemble de départ de f.
- F est appelé l’ensemble d’arrivée de f.
- On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E l’ensemble des applications de E dans F.

Exemple 1. Les fonctions usuelles sont des exemples d’applications :

- Les fonctions cos, sin, exp sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($E = F = \mathbb{R}$). On peut écrire $\cos \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- La fonction ln est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ ($E = \mathbb{R}_+^*$ et $F = \mathbb{R}$). On peut écrire $\ln \in \dots$
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notée :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned} \qquad \text{donc } u \in \dots$$

- Étant donné un ensemble E, on peut définir des applications :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(E) \\ A &\mapsto \overline{A} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathscr{P}(E)^2 &\to \mathscr{P}(E) \\ (A,B) &\mapsto A \cup B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : \mathscr{P}(E)^2 &\to \mathscr{P}(E) \\ (A,B) &\mapsto A \cap B \end{aligned}$$

  On peut écrire $g \in \dots$
- I étant un ensemble quelconque, une famille $(a_i)_{i\in I}$ d’éléments de E peut être vue comme une application de I dans $\mathbb{R}$ notée :

$$\begin{aligned} a : I &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned} \qquad \text{donc } a \in E^I$$

Notation. Sauf mention contraire, la notation “$f : E \to F$” indique que f est une application ayant respectivement E et F comme ensembles de départ et d’arrivée. Cela entraine que f est définie sur E tout entier.

Remarque. Dans certains exercices, on définit une application $f : E \to F$ en précisant l’expression de $f(x)$, et on demande ensuite de montrer que cette application est bien définie, c’est-à-dire qu’il s’agit bien d’une application. Cela signifie qu’il faut vérifier que pour ***chaque*** élément $x \in E$:

1. $f(x)$ ait un sens.
2. $f(x)$ appartienne à F.
3. $f(x)$ soit défini de manière unique.

Exemple 2. Parmi les applications suivantes, entourer celles qui sont bien définies :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \ln(x+1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \sqrt{2-n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \text{"L'unique solution positive de } x^2 = a\text{''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathscr{P}(\mathbb{N}) &\to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ A &\mapsto A \cup \{0,1,2\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_5 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_6 : i\mathbb{R} &\to \mathbb{U} \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

Dans toutes ces écritures, les variables x, a, A, z... sont des variables **muettes**.

1.2 Fonctions

Définition 7.2 – Définition “intuitive” de fonction

On dit que f est une fonction (réelle de la variable réelle) si à tout réel x, f associe une expression $f(x) \in \mathbb{R}$ *à condition que $f(x)$ ait un sens.* On la définit au moyen de la notation :

$$f : x \mapsto f(x)$$

- L'ensemble de définition de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x tels que le réel $f(x)$ a un sens.
- Une fois D_f déterminé, on obtient une application $f : D_f \to \mathbb{R}$.

On peut voir une fonction comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui peut ne pas être bien définie. Toutefois en restreignant l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ à D_f, on obtient une application bien définie.

Notation. Pour définir une application, les énoncés emploient en général la notation de l'exemple 2. Mais il existe des variantes, par exemple :

- $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto \dots \end{cases}$ (Cette accolade n'a pas de signification mathématique)
- $f : x \in E \mapsto \dots$ Ici, F est sous-entendu et se devine via l'expression de $f(x)$. Mais c'est parfois ambigu...
- $f : x \mapsto \dots$ Cette notation est utilisée pour les fonctions, auquel cas on sous-entend que $E = D_f$ et $F = \mathbb{R}$

Remarque. Dans le programme de MPSI, il est explicitement écrit qu'on ne fait aucune distinction entre les “applications” et les “fonctions” : ces deux mots sont considérés comme interchangeables. On adoptera cette convention dorénavant.

1.3 Applications usuelles

Exemple 3. Pour tout ensemble E, on note id_E l'application identité de E définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

C'est l'application qui à tout élément associe l'élément lui-même.

Exemple 4. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On note $\mathbb{1}_A$ l'application indicatrice sur A définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 5. Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer que :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Définition 7.3

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle graphe de f, qu'on notera[1] Γ_f le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

En pratique, on s'intéresse surtout aux graphes des fonctions réelles de la variable réelle ($E = D_f \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$). Le graphe de f correspond alors à l'ensemble des points du plan situés sur la courbe représentative de f (cf ci-dessous).

Exemple 6. Le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, un point (x_0, y_0) du plan $\mathbb{R}^2$ appartient au graphe de f si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0, y_0) = (x, x^2)$, ce qui revient à dire que $y_0 = x_0^2$.

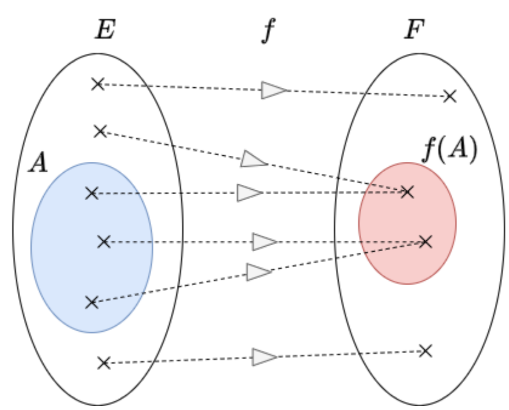
2 Image directe et image réciproque

2.1 Image directe

Définition 7.4 – Image directe

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$.
On définit l'image directe de A par f comme étant l'ensemble des images par f de tous les éléments de A. On la note :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$



⚠ $f(x)$ est un *élément* de F (on écrira $f(x) \in F$), mais $f(A)$ est un *sous-ensemble* de F (on écrira $f(A) \subset F$).

Exemple 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Si $A = \{0, 3, 5\}$, alors $f(A) = \ldots\ldots$
- Si $A = [-2, 1]$, alors $f(A) = \ldots\ldots$
- $f(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$

Remarque. Lorsque f est une fonction continue (d'une partie) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que A est un intervalle, on peut deviner et déterminer $f(A)$ via un tableau de variations.

1. Mais ce n'est pas une notation officielle.

Exemple 8. On pose $f : x \mapsto 4 - x^2$ et $A = [-3, 2]$. Déterminer $f(A)$.

Cependant, dans le cas plus général où f est une application quelconque, ou que A n'est pas un intervalle, il faut une preuve rigoureuse de ce que vaut $f(A)$. La caractérisation ci-dessous est alors précieuse :

Théorème 7.5 – Caractérisation de $y \in f(A)$

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Pour tout $y \in F$,

Définition 7.6

Soit $f : E \to E$ une application et $A \subset E$. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$, ou encore si $\forall x \in A \quad f(x) \in A$

Exemple 9. En reprenant la fonction f de l'ensemble précédent, l'ensemble $[0, 3]$ n'est pas stable par f car $f([0, 2]) = \ldots\ldots \not\subset [0, 2]$. Cependant, $]-\infty, -3]$ est stable par f car $f(]-\infty, -3]) = \ldots\ldots$

2.2 Image réciproque

Définition 7.7

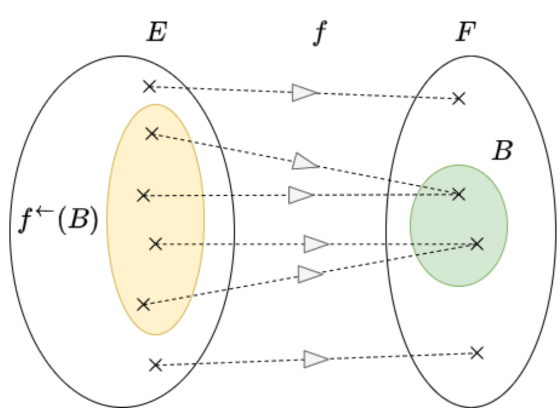
Soit $f : E \to F$ une application, $x \in E$ et $y \in F$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image par f de x et que x est UN antécédent de y par f.

Une même valeur de y dans F peut admettre plusieurs antécédents par f. Par exemple pour l'application cos, le réel $\dfrac{1}{2}$ admet une infinité d'antécédents par cos.

Définition 7.8 – Image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On définit l'image réciproque de B par f comme étant l'ensemble des antécédents des éléments de B. On la note :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



Dit autrement, f^{-1} l'ensemble des éléments x de E qui sont envoyés dans B par f.

Plus tard, on définira la notation f^{-1} pour désigner, lorsque cela a un sens, l'application réciproque (ou inverse) de f. Cependant, l'ensemble $f^{-1}(B)$ n'est pas défini à partir de f^{-1} ! La définition de $f^{-1}(B)$ ci-dessus dépend uniquement de f. En particulier :

L'ensemble $f^{-1}(B)$ a un sens pour toute fonction f, même lorsque l'application f^{-1} n'a pas de sens.

Exemple 10. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.

- Si $B = \{4\}$, alors $f^{-1}(B) = \dots$
- Si $B = \left[4,9\right]$, alors $f^{-1}(B) = \dots$
- Si $B = \mathbb{R}_-^*$, alors $f^{-1}(B) = \dots$

Théorème 7.9 – Caractérisation de $x \in f^{-1}(B)$

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. Pour tout $x \in E$,

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto x^2$ et $B = \left]4,9\right[$. Montrer que $f^{-1}(B) = \left]-3,-2\right[\cup \left]2,3\right[$.

2.3 Propriétés théoriques des images directe et réciproque

Théorème 7.10 – Propriétés des images directes et réciproques

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$.

1. L'inclusion est conservée quand on applique f ou f^{-1} :
   (a) $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
   (b) $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. Les opérations f et f^{-1} se distribuent sur $\cup$:
   (a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
   (b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
3. L'opération f^{-1} se distribue sur $\cap$, mais pas f :
   (a) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (attention ce n'est qu'une inclusion !)
   (b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Démonstration.

-

- Prouvons 1)b). On suppose $B \subset B'$. Montrons que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$. Soit donc $x \in f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\implies f(x) \in B \\ &\implies f(x) \in B' \\ &\implies x \in f^{-1}(B') \end{aligned}$$

  D'où $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$, par arbitraire sur x.

-

- Maintenant, montrons 3) a). Soit $A, A' \subset E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap A') &\iff \exists x \in A \cap A' \quad y = f(x) \\ &\implies \exists x \in A \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in A' \quad y = f(x') \qquad (*) \\ &\iff y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in f(A') \\ &\iff y \in f(A) \cap f(A') \end{aligned}$$

  D'où par arbitraire sur y, on a $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

  Note : la ligne $(*)$ n'est pas équivalente à la ligne qui lui précède[2].

-

2. *En effet si on suppose $(*)$ on peut* a priori *avoir $x \neq x'$ et donc on ne peut pas en déduire que y est l'image d'un élément de $A \cap A'$. C'est pour ça qu'on n'a qu'une inclusion et qu'en général $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Contre-exemple :*

$$A = \{0\} \qquad A' = \{1\} \qquad f : x \in \mathbb{R} \mapsto \pi$$

alors $f(A) = f(A') = \{\pi\}$ et $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$.

•

□

3 Opérations sur les applications

3.1 Restriction, prolongement

Définition 7.11

Soit $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si f et g ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et qu'elles prennent les mêmes valeurs en chaque élément de l'ensemble de départ, i.e. :

$$\begin{cases} E = E' \\ F = F' \\ \forall x \in E \qquad f(x) = g(x) \end{cases}$$

Définition 7.12 – Restriction et prolongement

Soit$A \subset E$.

- Soit $f : E \to F$. On appelle restriction de f à A, notée $f\big|_A$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f\big|_A : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

  L'application $f\big|_A$ est définie *seulement* sur A !
- Soit $f : A \to F$. On appelle prolongement de f à E toute application $g : E \to F$ pour laquelle $g\big|_A = f$, i.e. pour laquelle $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$.

Exemple 12.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ la fonction inverse (définie sur $\mathbb{R}^*$). Alors la fonction $f\big|_{\mathbb{R}_+^*}$ est décroissante, $f\big|_{\mathbb{R}_-^*}$ est décroissante, mais f ne l'est pas.
2. On peut définir l'application signe : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : $\quad \text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ On peut définir un pro-

longement g de cette fonction à $\mathbb{R}$ en posant par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

À noter qu'on a choisi de manière arbitraire que $g(0) = 0$. On aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour $g(0)$: 1, -1, $\sqrt{2}$...

3.2 Composition d'applications

Définition 7.13 – Composition

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On appelle composée de g et f, notée $g \circ f$, l'application de $\mathscr{F}(E,G)$ définie par :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple 13. ◦ Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

◦ Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^{2p} \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p}} = \sqrt[2p]{x} \end{aligned}$ Alors $\begin{aligned} g \circ f : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} f \circ g : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned}$

On a en général $g \circ f \neq f \circ g$, comme le montre l'exemple ci-dessus. Cependant, si f et g sont deux applications telles que $g \circ f = f \circ g$, on dit que f et g commutent.

Remarque. On considère $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ avec $F \neq F'$. Puisque $F \neq F'$, d'après la Définition 7.13, on ne pourrait pas définir $g \circ f$... Cependant, on considère que l'application $g \circ f$ est bien définie à condition que pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F'$, ce qui permet de donner un sens à $g(f(x))$. Cela revient à dire que $f(E) \subset F'$. Cf exemple suivant :

Exemple 14. On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

L'application $g \circ f$ n'aurait techniquement pas de sens selon la Définition 7.13, mais dans les faits, cela ne pose pas de problème car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier sur $f(\mathbb{R})$.

Théorème 7.14 – "Associativité" de la composition

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $\quad g \in \mathscr{F}(F,G)$, $\quad h \in \mathscr{F}(G,H)$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Démonstration. Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont toutes deux des éléments de $\mathscr{F}(E,H)$, donc ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée. Enfin, pour tout $x \in E$, on a :

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$$

Ainsi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

Remarque. Cette propriété d'associativité permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté. C'est la même situation que les opérations $\cup$, $\cap$, "et", "ou" qui sont, elles aussi, associatives.

4 Injection, surjection, bijection

4.1 Injection

Définition 7.15 – Injection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une injection (ou que f est injective) lorsque :

Une conséquence de l'injectivité est la suivante : pour tous $a, b \in E$, on a

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

Autrement dit, on peut "simplifier" par f si elle est injective. On notera que l'implication ci-dessus ou celle de la définition est même une équivalence, mais en pratique il suffit de retenir que c'est une implication, ce qui simplifie les démonstrations.

Remarque. Pour montrer que f n'est PAS injective, il suffit de montrer la négation de la définition, donc de trouver x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.

Exemple 15.

- Soit $f : \boxed{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas injective car ...
- Soit $f : \boxed{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f est injective.

- Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective.

Théorème 7.16

La composée d'applications injectives est injective.

Démonstration.

□

Théorème 7.17

f est injective si et seulement si tout élément y de F admet **au plus un antécédent** par f. Cela revient à dire que pour tout $y \in F$, l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y): \quad f(x) = y$$

admet **au plus / au maximum** une solution x dans E. Il y a donc *unicité* d'une éventuelle solution.

Démonstration.

□

Remarque. Si f est une fonction réelle de la variable réelle, on peut reconnaitre si elle est injective ou non à partir de son graphe :

- Si on peut tracer une droite horizontale qui coupe le graphe de f en au moins deux points, alors f n'est pas injective.
- Sinon, f est injective (auquel cas chaque droite horizontale coupe le graphe de f en zéro ou un point).

Exemple 16. Grâce à son graphe, on remarque que la fonction cosinus n'est pas injective. L'égalité $\cos(a) = \cos(b)$ ne peut donc pas se simplifier en $a = b$.
Grâce à son graphe, on remarque que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective. Ainsi, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ entraine $a = b$.

4.2 Surjection

Définition 7.18 – Surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une surjection (ou qu'elle est surjective) lorsque tout élément y de F admet **au moins un antécédent** par f :

Exemple 17.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}_+}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f est surjective.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent par f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2 \neq -1$.
- Pour tout ensemble E, l'application id_E est surjective.

Théorème 7.19

La composée d'applications surjectives est surjective.

Démonstration.

□

Théorème 7.20

f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **au moins / au minimum** une solution (dans E). Il y a donc *existence* d'une solution.

Théorème 7.21

Soit $f : E \to F$ une application. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration.

□

Théorème 7.22

f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **au moins / au minimum** une solution x dans E. Il y a donc *existence* d'une solution.

4.3 Bijection

Définition 7.23 – Bijection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une bijection (ou qu'elle est bijective) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, f est bijective si tout élément y de F admet **exactement un antécédent** par f :

Remarque (***jectivité dépend des ensembles de départ et d'arrivée)**.** Ci-dessous on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. Selon les ensembles de départ et d'arrivée de f, déterminer s'il s'agit d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection.

$f : x \mapsto x^2$	Injection	Surjection	Bijection
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$			

Remarque. Soit $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On dit que "f est surjective de A sur B" si $\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad f(x) = y$
- On dit que "f est bijective de A sur B" si $\forall y \in B \quad \exists! x \in A \quad f(x) = y$

Exemple 18.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout ensemble E, l'identité id_E est bijective.

Théorème 7.24

La composée d'applications bijectives est bijective.

Démonstration.

□

4.4 Application réciproque

Rappel : si $f : E \to F$ est bijective, alors pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Définition 7.25 – Application réciproque

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors on peut définir une application de F dans E, qui à chaque $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On appelle cette application la réciproque de f et on la note f^{-1}. On a ainsi :

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$$

En particulier, l'application f^{-1} est définie de F dans E.

Théorème 7.26

Soit $f : E \to F$ bijective. On a :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{i.e.} \qquad \forall x \in E \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \qquad \text{i.e.} \qquad \forall y \in F \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Démonstration.

□

⚠ On ne peut écrire f^{-1} que si on a montré que f est bijective. La seule exception est l'ensemble $f^{-1}(B)$ avec $B \subset F$, qui lui a un sens, que f soit bijective ou non.

Exemple 19.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$. Alors f est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

- Soit $f : \boxed{\mathbb{R}_+} \to \boxed{\mathbb{R}_+}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Théorème 7.27

Soit $f : E \to F$. On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Alors f est bijective et on a $g = f^{-1}$. En particulier, il n'y a qu'une seule application g qui vérifie les égalités ci-dessus.

Démonstration.

□

Remarque. Dans la preuve ci-dessus, on remarque que :

- Pour prouver l'injectivité de f, on s'est seulement servi de l'hypothèse $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
- Pour prouver la surjectivité de f, on s'est seulement servi de l'hypothèse $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Remarque. Dans le cas où $f : E \to E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on a donc $f^{-1} = f$. On dit alors que f est une <u>involution sur E</u>.

Exemple 20.
- L'application id_E est une involution sur E.
- Les applications $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont des involutions sur $\mathbb{C}$. Elles sont donc bijectives et sont leur propre application réciproque.

Théorème 7.28

f est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **exactement une et une seule** solution (dans E). Il y a donc *existence et unicité* d'une solution. Cette solution est $x = f^{-1}(y)$.

Exemple 21. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$. Montrer que f est une bijection de E sur un ensemble F qu'on précisera. On donnera également l'expression de sa réciproque.

4.5 Propriétés de l'application réciproque

Théorème 7.29

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors :

1. L'application $f^{-1} : F \to E$ est également bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. L'application $g \circ f : E \to G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

$\square$

Remarque. Soit $f : E \to F$ une application bijective et $B \subset F$. Alors l'ensemble $f^{-1}(B)$ peut représenter :

- L'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \;\middle|\; f(x) \in B\right\} \qquad (*)$$

(qui est défini même si f n'est pas bijective)

- L'image directe de B par f^{-1} :

$$f^{-1}(B) = \left\{ f^{-1}(y) \;\middle|\; y \in B \right\} = \left\{ x \in E \mid \exists y \in B \quad f^{-1}(y) = x \right\} \qquad (**)$$

  (qui n'est défini QUE si f est bijective)

Ces deux ensembles ont la même notation, mais ils sont en fait égaux : $\underbrace{f^{-1}(B)}_{(*)} = \underbrace{f^{-1}(B)}_{(**)}$

5 Transformations du plan complexe

Dans cette section, on identifie complètement $\mathbb{C}$ au plan complexe. On pourra dire que z est un point du plan, et qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'applique aussi bien à un complexe de $\mathbb{C}$ qu'à un point du plan complexe.

Définition 7.30

On appelle transformation du plan (complexe) toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est bijective.

Il existe énormément de transformations du plan complexe. On expose ici quelques transformations remarquables.

5.1 Translations

Définition 7.31 – Translation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe $u \in \mathbb{C}$. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}$$

ou de manière équivalente, cette application est :

$$\begin{aligned} \tau_u : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + u \end{aligned}$$

Remarque. La notation τ_u n'est pas officielle, tout comme les notations $h_{\omega,k}$ et $\rho_{\omega,\theta}$ qu'on va voir plus loin.

Théorème 7.32

La translation τ_u est une transformation (i.e. est bijective) et son inverse est la translation τ_{-u} :

$$\begin{aligned} \tau_{-u} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z - u \end{aligned}$$

Ainsi, $(\tau_u)^{-1} = \tau_{-u}$.

Démonstration. On vérifie trivialement que $\tau_u \circ \tau_{-u} = \tau_{-u} \circ \tau_u = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Donc τ_u est bijective et son inverse est τ_{-u}. □

5.2 Homothétie

Définition 7.33

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

ou de manière équivalente, cette application est :

$$\begin{aligned} h_{\omega,k} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto k(z-\omega)+\omega \end{aligned}$$

En effet, la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ équivaut en termes d'affixes à :

$$z' - \omega = k(z-\omega)$$

de sorte que z' se déduit de z par la relation $z' = k(z-\omega)+\omega$.

Théorème 7.34 – Homothéties

L'homothétie $h_{\omega,k}$ est une transformation (i.e. est bijective) et son inverse est l'homothétie $h_{\omega,\frac{1}{k}}$, i.e. l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $h_{\omega,k} \circ h_{\omega,\frac{1}{k}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et $h_{\omega,\frac{1}{k}} \circ h_{\omega,k} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. □

Exemple 22. L'homothétie de centre O (l'origine) et de rapport k est donnée par $h_{0,k}(z) = kz$. Son inverse est $h_{0,\frac{1}{k}}$.

5.3 Rotations

On a déjà vu que multiplier un complexe z par $e^{i\theta}$ revient à le faire "tourner" d'un angle θ (si $z \neq 0$, cela revient en effet à augmenter son argument de θ).

Définition 7.35 – Rotations

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$, qui est le seul point tel que :

le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ s'obtient par une rotation d'angle (orienté) θ du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

De manière équivalente, cette application est :

$$\begin{aligned} \rho_{\omega,\theta} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{aligned}$$

En effet, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $z' - \omega$, qui s'obtient par rotation d'angle θ du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ d'affixe $z - \omega$. On a donc

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

de sorte que $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Théorème 7.36

La rotation $\rho_{\omega,\theta}$ est une transformation (i.e. est bijective) et son inverse est l'homothétie $\rho_{\omega,-\theta}$, i.e. la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\rho_{\omega,\theta} \circ \rho_{\omega,-\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et $\rho_{\omega,-\theta} \circ \rho_{\omega,\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. □

Exemple 23. La rotation de centre O (l'origine) et d'angle θ est définie par $\rho_{0,\theta}(z) = e^{i\theta} z$ et son inverse est $\rho_{0,-\theta}(z) = e^{-i\theta} z$.

5.4 Similitudes directes

Définition 7.37

On dit qu'une application $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $s(z) = az + b$.

Ici a et b sont des complexes, pas nécessairement des réels !

Remarque (Hors-programme)**.** Les similitudes directes sont exactement toutes les transformations du plan qui conserve les rapports entre distances et les angles orientés : si on note A', B', C', D' les images de A, B, C, D par une similitude directe, on a (en supposant $A \neq B$ et $C \neq D$) :

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Une propriété importante est que toute similitude directe peut s'écrire ou bien comme une translation, ou bien comme une composée d'une rotation et d'une homothétie. Reconnaitre une similitude, c'est identifier précisément quelles sont les transformations du plan qui la constituent.

Définition 7.38

Soit $f : E \to E$ une application. Un élément x de E est appelé un point fixe de f si $f(x) = x$.

Lemme 7.39

Si $a \neq 1$, alors la similitude $s : z \mapsto az + b$ admet un unique point fixe $\omega \in \mathbb{C}$ donné par $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Démonstration.

□

Méthode – Reconnaitre une similitude directe

Soit $s : z \mapsto az+b$ une similitude directe (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

- Si $a = 1$, alors $s(z) = z+b$: s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Le point Ω d'affixe ω est appelé le centre de la similitude. Ensuite, on écrit a sous la forme trigonométrique : $a = re^{i\theta}$. Alors :

  $$s = h_{\omega,r} \circ \rho_{\omega,\theta} = \rho_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,r}$$

  Autrement dit, s est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport r et d'une rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exceptionnellement ici, on a $h_{\omega,r} \circ \rho_{\omega,\theta} = \rho_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,r}$: une homothétie et une rotation commutent lorsqu'elles ont le même centre (ici $\Omega(\omega)$). On peut vérifier qu'à tout point M du plan, on peut appliquer d'abord l'homothétie puis la rotation ou faire l'inverse : le point image sera identique.

Exemple 24. Reconnaitre la similitude s définie par $s(z) = -2iz + 6i + 3$.

Remarque. Il existe des transformations du plan qui ne sont pas des similitudes directes, telles que la conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$. Il s'agit en fait d'une *similitude indirecte*, car elle transforme un angle θ en $-\theta$. Mais cela n'est pas au programme.

6 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on peut :

- Montrer la définition.
- Bien plus rarement : trouver une fonction g telle que $g \circ f$ soit injective, et montrer que cela entraine f injective (cf Théorème 7.27 et la Remarque qui suit).

Pour montrer que f n'est pas injective, on montre la négation de la définition.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on peut :

- Montrer la définition.
- Pour chaque $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ et montrer qu'il existe au moins une solution.
- Bien plus rarement : trouver une fonction g telle que $f \circ g$ soit surjective, et montrer que cela entraine f surjective (cf Théorème 7.27 et la Remarque qui suit).

Pour montrer que f n'est pas surjective, on montre la négation de la définition.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut :

- Montrer que f est injective et surjective.
- Trouver une application $g : F \to E$ qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. On a alors en plus $g = f^{-1}$.
- Pour chaque $y \in F$, résoudre l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad y = f(x)$$

  et montrer qu'il existe exactement une solution x_y. De plus, l'application f^{-1} est la fonction qui à y associe x_y.

Pour montrer que f n'est PAS bijective, on peut montrer que f n'est pas injective OU que f n'est pas surjective.

On verra d'autres méthodes plus tard en cours d'année, mais elles ne s'appliquent que dans un cadre particulier (avec des conditions sur E et/ou F) et sont donc moins générales que les méthodes ci-dessus.